Lycée El Amel Fouchana	Devoir de contrôle n°01		
Prof : B. Zouhaier	4 ème SC	Novembre 2019	Durée :2heures

Exercice n°1(3 points) :

$(o,\vec{u},\vec{v})$ désigne un repére orthonormé du plan complexe A, B et C d'affixes respectives 1, i et $-$ i ,
cocher la réponse exacte, aucune justification n'est demandée

1. L'ensemble des points M d'affixes Z tels que $\left|\frac{Z-i}{Z+i}\right| = 1$ est :

   a) la droite (OA) ; b) la droite (AB) ; c) le cercle de diamètre [BC]

2. L'ensemble des points M d'affixes Z tels que $(z-i)(\bar{z}+i) = 4$ est le cercle:

   a) de centre A et de rayon 2 ; b) de centre B et de rayon 2; c) de diamètre [BC]

3. L'ensemble des points M d'affixes Z tels que $\bar{Z} - iZ - 1 + i = 0$ est :
   a) la droite (AB) ; b)la droite (AC) ; c)la droite (BC)

Exercice n°2(4points) :

1. a)Linariser cos^3x
   b)Déduire que $4cos^3x - 3cosx - cos3x = 0$ pour tout réel x
2. Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}$
   a)Montrer que g est strictement décroissante sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$
   b)En déduire que l'équation $4x^3 - 3x - \frac{1}{2} = 0$ admet une solution α unique dans $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[$
3. a)Montrer que $\alpha = cos\frac{5\pi}{9}$
   b)En déduire une valeur approchée de α par défaut a 10^{-2} prés

Exercice n°3(7points) :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(o,\vec{u},\vec{v})$, A et B les deux points d'affixes respectives $a = 1 + i\sqrt{3}$ et $b = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$ et (Γ) le cercle de centre O et de rayon 2

I/

1. a)Vérifier $A \in (\Gamma)$
   b)Construire $(\Gamma) et\ A$
2. a)Vérifier que $\frac{b-a}{a} = i$
   b)Déduire que la droite (AB) est la tangente à (Γ) au point A et que $AB = 2$
   c)Construire alors le point B
3. a)Ecrire les nombres complexes $(1 + i)$ et a sous forme exponentielle
   b)En déduire la forme exponentielle de b et la valeur exacte de $tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$

II/ Soit $\theta \epsilon \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et A' et B' deux point d'affixes respectives $a' = ae^{i2\theta}$ et $b' = be^{i2\theta}$

1. a)Montrer que $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'}}\right) = 2\theta + 2k\pi;\ \ k \epsilon \mathbb{Z}$

   b)Déduire que l'aire du triangle OBB' est $\mathcal{A} = 4\sin(2\theta)$
2. On désigne par J le milieu de $[BB']$ et I le milieu de $[AA']$

   a)Vérifier que $\left(1 + e^{i2\theta}\right) = 2cos\theta e^{i\theta}$ et $\left(1 - e^{i2\theta}\right) = -2isin\theta e^{i\theta}$

   b)Montrer que $\frac{aff(\overrightarrow{IJ})}{aff(\overrightarrow{AA'})}$ est réel

   c)En déduire que la droite (AJ) est la médiane issue de A dans le triangle ABB'

Exercice n°4(6points) :

A/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} 3x + \sqrt{x^2 - 1} & si\ x \leq -1 \\ \frac{x^2-x-2}{X+1} & si - 1 < x \leq 0 \\ \frac{1-\cos(\pi\sqrt{x})}{x} & si\ x > 0 \end{cases}$

1. a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

   b) Montrer que, pour tout $x > 0$, $0 \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$

   c) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
2. a)Montrer que f est continue en (-1)

   b)Montrer que $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{1-\cos(\pi\sqrt{x})}{x} = \frac{\pi^2}{2}$ En déduire que f est discontinue en 0

   c)Montrer que f est continue sur $]-\infty, 0[$

B/ Soit la fonction g définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dont le tableau de variation est le suivant

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$g(x)$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$	$\|\|$	$-\infty$ $\nearrow$	-1

1. Déterminer $g(]-\infty, 0]); g(]-\infty, 1[)\ et\ g(IR\backslash\{1\})$
2. Calculer $\lim\limits_{x \to 1^-} fog(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} gof(x)$
3. Montrer que fog est continue sur $]1, +\infty[$

Bon Travail